

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ БИОМАССЫ И РЕСУРСОВ ЭКОСИСТЕМЫ В УСЛОВИЯХ ПЕРЕМЕННЫХ НЕГАТИВНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

М. В. Зильберман, М. В. Черепанов*

¹Федеральное государственное бюджетное учреждение «Уральский государственный научно-исследовательский институт региональных экологических проблем» (ФГБУ УралНИИ «Экология»), г. Пермь, Россия, *e-mail: zilberman@ecology.perm.ru

Поступила в редакцию 16.04.2019 г.

Аннотация – Представлены результаты исследований в рамках расширенной динамической модели, описывающей взаимодействие биомассы экологической системы и ресурсов в ситуации меняющегося внешнего воздействия. В основе этой модели лежит представление о том, что экологическая система способна накапливать ресурсы, необходимые для собственного существования в той области пространства, в котором локализована данная система. Показано, что случайный процесс изменения уровня негативного воздействия порождает изменения плотности биомассы и ресурсов в системе. При этом возможны два принципиально различных сценария поведения системы. В первом случае плотность биомассы и ресурсов остаются в области устойчивости в течение неопределенно долгого времени. Во втором случае происходит выход параметров состояния из этой области и последующая деградация системы.

Ключевые слова: экологическая система, биомасса, ресурсы, негативное воздействие, динамическая модель.

MODELLING INTERACTION OF BIOMASS AND ECOSYSTEM RESOURCES UNDER CONDITIONS OF VARIABLE NEGATIVE IMPACT

M. V. Zilberman, and M. V. Cherepanov*

Federal State Budgetary Institution Ural State Scientific Research Institute of Regional Ecological Problems, Perm, Russia, *e-mail: zilberman@ecology.perm.ru

Received April 16, 2019

Abstract – Research results are presented in terms of an extended dynamic model describing the interaction of biomass of an ecological system and its resources in a situation of variable external inputs. The model is based on the fact that an ecological system is able to accumulate resources necessary for its own existence in the space area of its localization. It has been shown that a random process of changing the level of negative impact generates changes in the density of biomass and resources of the system. In this context, two fundamentally different scenarios of the system behavior are possible. In the first case, the density of biomass and resources is maintained in the sustainable area for an indefinitely long period of time. In the second case, the parameters of the state fall outside of this area followed by degradation of the system.

Keywords: ecological system, biomass, resources, negative impact, dynamic model.

ВВЕДЕНИЕ

Вопросам создания благоприятной окружающей среды в настоящее время уделяется значительное внимание. Согласно [1], благоприятная окружающая среда – это «окружающая среда, качество которой обеспечивает устойчивое функционирование естественных экологических систем, природных и природно-антропогенных объектов». В реальных условиях любая экологическая система во время своего существования подвергается комплексу негативных воздействий природного и антропогенного характера. Поэтому оценка качества окружающей среды должна основываться на оценке устойчивости данной экосистемы к данному комплексу воздействий. Понятно, что такая оценка подразумевает наличие набора данных о состоянии конкретного природного объекта и способов сравнения этого набора данных с некоторым набором допустимых значений.

При этом необходимо отметить, что большинство экспериментальных методов, применяемых для изучения состояния природной среды, были в свое время разработаны для оценки потенциала тех или иных природных ресурсов, например, сельскохозяйственных угодий, лесных массивов, источников водоснабжения и т.д. Нормативы качества природных сред, используемые в Российской Федерации, носят в подавляющем большинстве случаев санитарно-гигиенический характер и в силу этого предназначены скорее для защиты населения от негативных последствий хозяйственной деятельности, чем защиты окружающей среды от антропогенных воздействий.

Традиционным подходом к экспериментальным исследованиям влияния антропогенного воздействия на окружающую среду является изучение того или иного набора характеристик на исследуемом участке, подвергающемся неким воздействиям, и сравнение полученного набора данных с аналогичным набором, характеризующим фоновый участок.

Такой подход позволяет делать статистически обоснованные выводы о сходстве или различии между исследуемым и фоновым участками. В то же время он не создает возможностей для оценки различий риска потери устойчивости экологической системы, поддерживаемой исследуемым и фоновым участками.

В предыдущей работе [2] нами была предложена динамическая модель, описывающая взаимодействие биомассы и ресурсов в экологической системе. В качестве параметров состояния системы рассматривались плотность биомассы и плотность ресурсов. В качестве параметров, определяющих характер эволюции этой системы, использовались: зависимость плотности биомассы от плотности ресурсов и кинетические коэффициенты, определяющие скорость процесса роста биомассы, скорость восполнения ресурсов за счет отмершей биомассы и скорость потерь ресурсов за счет абиотических процессов. Кроме того, модель позволяла учитывать внешние негативные воздействия на нее как некоторые постоянные величины.

В настоящей работе нами рассматривается расширение этой модели применительно к ситуации меняющегося внешнего воздействия.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Основным содержанием данной работы являлись модельные расчеты решений системы дифференциальных уравнений. В качестве расчетной схемы использовалась схема Эйлера [3]. При этом разностная схема конструировалась таким образом, чтобы обеспечить вычислительную устойчивость при любой величине шага. Моделирование случайного процесса проводилось в соответствии с рекомендациями, изложенными в [4]. Для сравнения результатов расчетов, выполненных при различных значениях параметров системы уравнений, использовались средние значения плотности биомассы и ресурсов, а также коэффициенты вариации этих величин, определяемые как отношение стандартного отклонения к среднему значению.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Основное уравнение системы представлено выражением (1). В соответствии с этим выражением скорость изменения плотности биомассы пропорциональна произведению плотности биомассы и разности между достигнутой плотностью биомассы и той плотностью, которая может быть достигнута при имеющихся в системе ресурсах.

Изменение плотности ресурсов определяется разностью скоростей восполнения ресурсов, принятой пропорциональной плотности биомассы и потери ресурсов за счет абиотических процессов, принятой пропорциональной плотности ресурсов.

Интенсивность негативного воздействия на систему представляли как случайный процесс, заданный его средним значением, дисперсией и видом автокорреляционной функции.

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = a \cdot N \cdot \left(f(R) \cdot g(t) - \frac{N}{N_{max}} \right) \\ \frac{dR}{dt} = b \cdot N - c \cdot R \end{cases}, \quad (1)$$

где

- N — плотность биомассы,
- R — плотность ресурсов,
- N_{max} — максимальная плотность биомассы при полной обеспеченности ресурсами,
- a — скорость роста биомассы в отсутствии ограничений,
- b — скорость восполнения ресурсов за счет отмершей биомассы,
- c — скорость потерь ресурсов,
- $f(R)$ — функция, изменяющаяся от 0 до 1 при росте плотности ресурсов от 0 до ∞ ,
- $g(t)$ — функция, описывающая негативное влияние (значения в интервале от 0 до 1).

Для удобства дальнейшего анализа система (1) была преобразована к безразмерному виду (2) за счет замены переменных $u = N/N_{max}$, $v = R/R_{0,5}$ и $\tau = t \cdot a$.

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = u \cdot (f(v) \cdot g(t) - u) \\ \frac{dv}{d\tau} = \beta \cdot (u - \gamma \cdot v) \end{cases}, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} u &= N/N_{\max} && \text{– безразмерная плотность биомассы} \\ v &= R/R_{0,5} && \text{– безразмерная плотность ресурсов} \\ \tau &&& \text{– безразмерное время} \\ R_{0,5} &&& \text{– плотность ресурсов, соответствующая условию} \\ &&& f(R) = 0,5 \\ \beta &= \frac{b \cdot N_{\max}}{a \cdot R_{0,5}} && \text{– параметр скорости восстановления ресурсов} \\ \gamma &= \frac{c \cdot R_{0,5}}{b \cdot N_{\max}} && \text{– параметр скорости потерь ресурсов.} \end{aligned}$$

Отметим, что факторы, определяющие переход к безразмерным параметрам, имеют различную физическую природу. Так, максимальная плотность биомассы ($N_{\max}$), плотность ресурсов, обеспечивающая плотность биомассы, равную половине максимальной ($R_{0,5}$), параметр скорости регенерации ресурсов (β) и параметры, обуславливающие зависимость $f(v)$, определяются, в основном, биологическими характеристиками экосистемы. Функция $g(t)$ отображает совместное негативное воздействие природных и антропогенных факторов и зависит в основном от природно-климатических условий и антропогенной нагрузки. Параметр скорости потери ресурсов связан с характеристиками почвенного покрова, в частности, с коэффициентом фильтрации и водным режимом.

Функция $f(R)$ в уравнении (1) определяет максимальную плотность биомассы, которую система может поддерживать при заданном значении плотности ресурсов. Существенной особенностью этой функции является то, что основные ее изменения происходят в относительно узком интервале значений. Действительно, малая плотность ресурсов может оказаться недостаточной для поддержания экологической системы, а при высокой плотности ресурсов ее влияние на плотность биомассы окажется незначительным. Например, в работе [5] приведена шкала обеспеченности растений легкоусвояемыми формами азота для почв Западной Сибири, согласно которой, очень низкой степени обеспеченности легкогидролизуемым азотом соответствует его содержание в почве менее 30, а высокой – 90 и более мг/кг.

Для обеспечения возможности решения системы (2) зависимость $f(R)$ было необходимо аппроксимировать той или иной гладкой функцией. К этой функции предъявлялись следующие очевидные требования:

- Функция должна сохранять конечные значения при любой плотности ресурсов.
- При нулевой плотности ресурсов функция должна быть равна нулю.

- Основные изменения значений функции должны приходиться на ограниченный интервал изменения плотности ресурсов.

Перечисленным требованиям соответствует функция (3)

$$f(R) = \text{lognorm}(R, \mu, \sigma), \quad (3)$$

где

$\text{lognorm}(R, \mu, \sigma)$ – интегральная логнормальная функция,
 R – аргумент интегральной логнормальной функции,
 μ, σ – параметры интегральной логнормальной функции.

Отметим, что, согласно [6], величина функции (3) равна 0,5 при соблюдении условия $\ln(R) = \mu$. Поэтому для системы с безразмерными переменными (2) в качестве зависимости между плотностями биомассы и ресурсов использовалась выражение (4)

$$f(v) = \text{lognorm}(v, 0, \sigma), \quad (4)$$

где

$\mu,$ – параметры логнормального распределения.
 σ

Зависимость (4) допускает двоякое толкование. Ее можно интерпретировать и как реакцию одного из биологических видов, входящих в состав экологической системы, и как реакцию суммарной биомассы системы на изменение плотности ресурсов. Во втором случае изменение биомассы системы может происходить как за счет изменения продуктивности отдельных видов, так и за счет изменения видового разнообразия.

Отметим, что при уменьшении параметра σ выражение (4) все в большей и большей степени приближается к ступенчатой функции, значение которой равно нулю при значении аргумента меньше единицы и единице в противоположном случае.

В работе [2] было показано, что в условиях постоянного уровня внешнего воздействия система, описываемая выражением (2), при использовании в качестве $f(v)$ выражения (4) может иметь до трех стационарных состояний.

Значения переменных u и v , соответствующих этим стационарным состояниям, определяются системой алгебраических уравнений (5)

$$\begin{cases} g \cdot \text{lognorm}(v, 0, \sigma) - u = 0 \\ u - \gamma \cdot v = 0 \end{cases}, \quad (5)$$

где

g – постоянное во времени внешнее воздействие.

Как в работе [2], так и в настоящей работе допустимыми значениями параметра g являлся интервал от 0 до 1. При этом наиболее благоприятным значением для биомассы являлся случай $g = 1$, а наименее благоприятным – $g = 0$.

Графическое представление зависимостей u от v для уравнений, входящих в систему (5), представлено на рисунке 1.

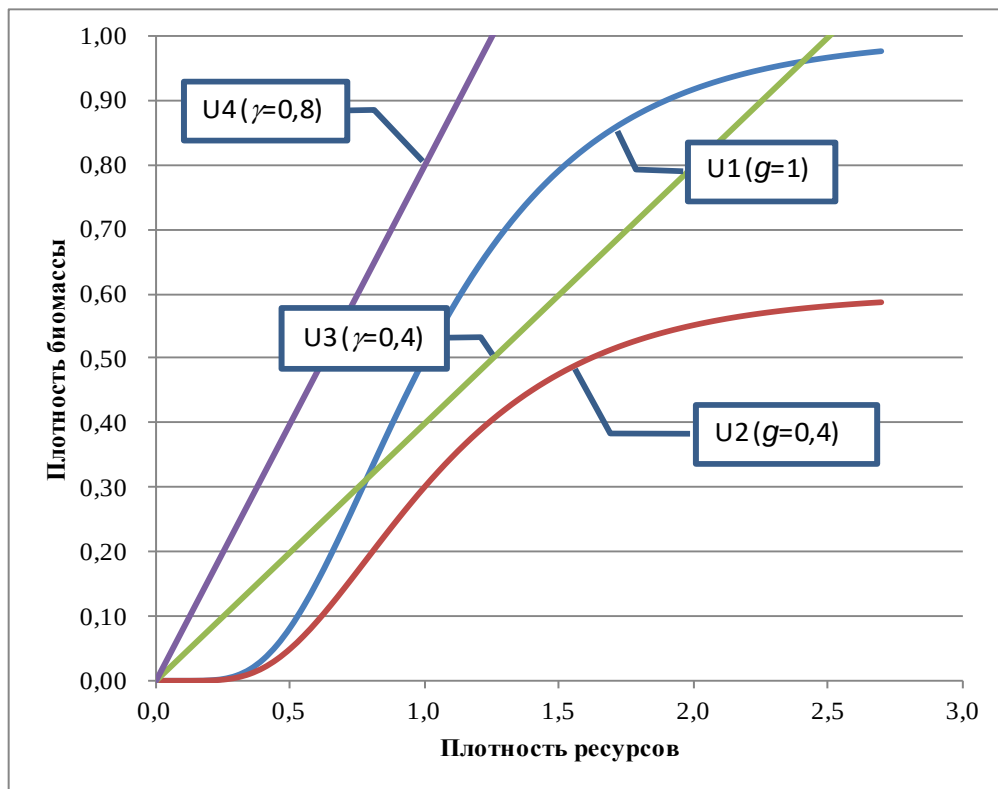


Рис. 1. Графическое представление зависимостей u от v для уравнений, входящих в систему (5).

Кривые U1 и U2 соответствуют первому уравнению системы (5) и вычислены для величины $\sigma = 0,5$ и величин g , равных 1 и 0,4, соответственно. Кривые U3 и U4 соответствуют второму уравнению системы (5) и вычислены для γ , равных 0,8 и 0,4, соответственно.

Стационарным состояниям соответствуют пересечения кривых, вычисленных по первому уравнению системы (5) и прямых, вычисленных по второму уравнению этой же системы. Как видно из рисунка 1, стационарные состояния с ненулевой плотностью биомассы и ресурсов возможны только при определенном сочетании параметров g , σ и γ , входящих в систему уравнений (5). Это условие может быть определено неравенством (6):

$$\frac{\gamma}{g} \leq \max \left(\frac{\log \text{norm}(v, 0, \sigma)}{v} \right). \quad (6)$$

Отметим, что при соблюдении равенства левой и правой частей выражения (6), система (2) имеет одно стационарное состояние с ненулевой плотностью биомассы и ресурсов, а в том случае, если левая часть меньше правой — два таких состояния.

Существенно, что из этих стационарных состояний только верхнее является устойчивым.

В работе [2] нами было показано, что в том случае, когда система (2) имеет два стационарных состояния с ненулевой биомассой, вся область возможных состояний системы разбивается на две подобласти, причем граница между этими областями проходит через нижнюю стационарную точку. При

этом, если начальные условия принадлежат одной из этих областей, которую в данной работе мы будем называть областью устойчивости, решение системы (2) сходится к не меняющемуся во времени результату, соответствующему верхнему стационарному состоянию. В том случае, если начальные условия принадлежат другой области (области деградации), то эволюция системы сводится к полной потере биомассы и ресурсов.

Схематически эта ситуация изображена на рисунке 2.

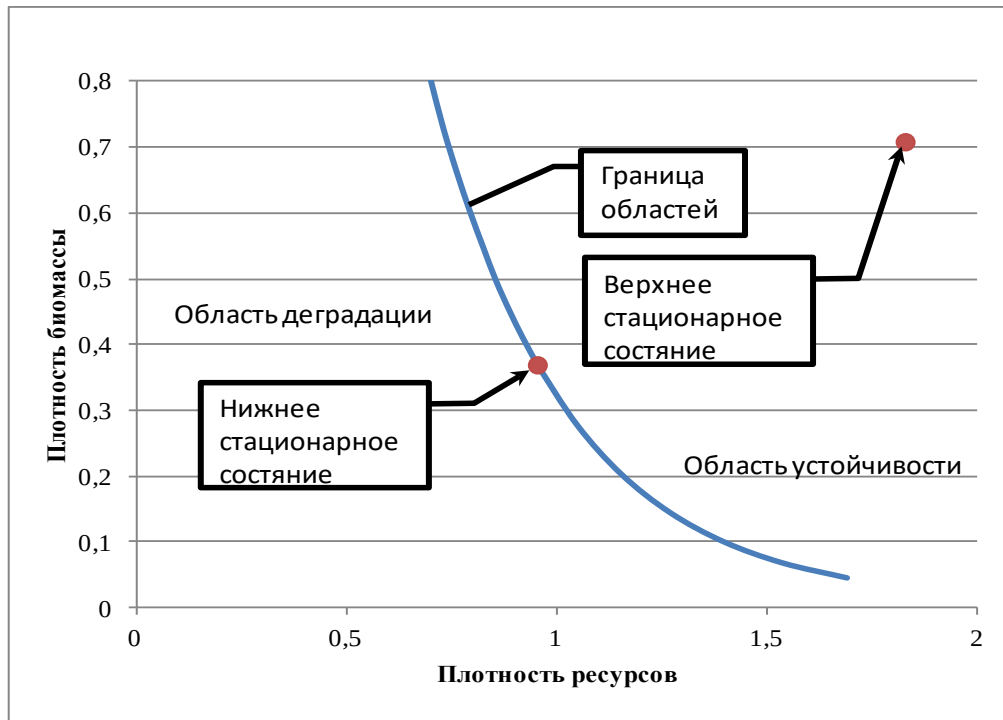


Рис. 2. Разделение области состояний.

Схема, представленная на рисунке 2, предполагает, что негативное воздействие на экологическую систему остается постоянным. В реальных условиях это предположение заведомо не выполняется уже потому, что всегда имеет место вариация погодных условий.

Случайный процесс изменения уровня негативного воздействия порождает изменения плотности биомассы и ресурсов в системе. При этом возможны два принципиально различных сценария поведения системы, как это показано на рисунке 3. В первом случае плотность биомассы и ресурсов остаются в области устойчивости в течение неопределенно долгого времени. Во втором случае происходит выход параметров состояния из этой области и последующая деградация системы.

Как видно из рисунка 3, вероятность выхода параметров состояния системы из области устойчивости тем больше, чем больше амплитуда колебаний значений этих параметров и тем меньше, чем больше расстояние между стационарными состояниями.

Исследование отклика системы, описываемой выражением (2), на изменения уровня негативного воздействия и является основной целью данной работы. Основным способом исследования служило численное решение

системы (2) при различных предположениях об изменении интенсивности негативного воздействия во времени. При этом в качестве результатов расчетов рассматривались статистические характеристики полученных решений.

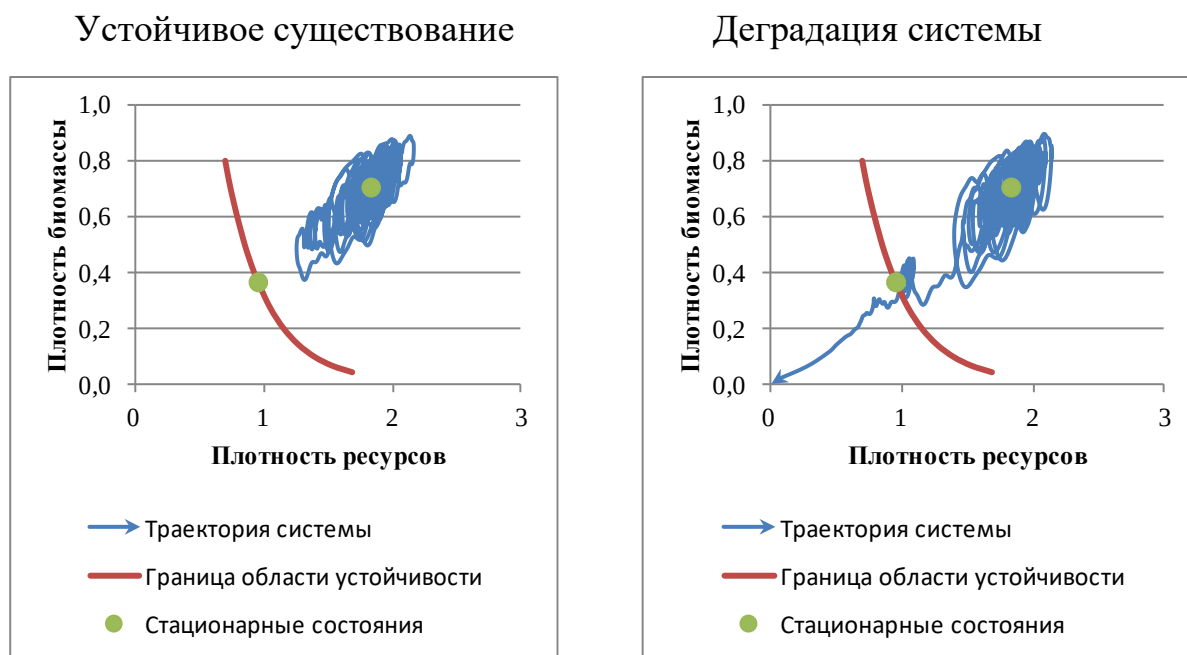


Рис. 3. Сценарии поведения системы.

Как уже указывалось, внешние воздействия на экологическую систему являются совокупностью природных и антропогенных воздействий. Задача установления однозначных связей между наблюдаемыми воздействиями (температура, количество осадков, освещенность, загрязнение природных сред и т.д.) и функцией $g(t)$, такой, какой она определена в выражениях (1) и (2), представляется абсолютно безнадежной. Поэтому задачей было установление связей между статистическими характеристиками полученных решений и параметрами случайного процесса.

При всех последующих расчетах в качестве распределения вероятностей использовали Бета-распределение, что автоматически обеспечивало интервал значений $g(t)$ 0 до 1. При этом также обеспечивалась возможность за счет варьирования параметров Бета-распределения задавать определенные значения среднего и дисперсии для моделируемого случайного процесса.

Первым вопросом, который предполагалось изучить, был вопрос о том, влияет ли вид корреляционной функции на результаты модельных расчетов.

В качестве модельных автокорреляционных функций использовались выражения, перечисленные в таблице 1.

Как видно из таблицы 1, все автокорреляционные функции, перечисленные в ней, зависят только от одного параметра (α), однако для разных автокорреляционных функций одним и тем же значениям α соответствуют разные по величине интервалы корреляции. Поэтому при проведении расчетов с использованием автокорреляционных функций, перечисленных в таблице 1, величина α подбиралась так, чтобы максимальные

интервалы корреляции, определяемые как время, при котором абсолютная величина автокорреляционной функции превышает значение 0,01, оказывались равными друг другу.

Таблица 1. – Модельные автокорреляционные функции

№ п/п	Вид автокорреляционной функции
1	$\exp(-\alpha \cdot \tau)$
2	$\exp(-\alpha \cdot \tau) \cdot (1 + \alpha \cdot \tau)$
3	$\exp(-\alpha \cdot \tau) \cdot (1 - \alpha \cdot \tau)$
4	$\exp(-\alpha \cdot \tau) \cdot (1 + \alpha \cdot \tau + \alpha^2 \cdot \tau^2/3)$

Для автокорреляционных функций, перечисленных в таблице 1, была выполнена серия расчетов, в которых варьировалась величина коэффициента вариации воздействия. Расчеты выполнялись для следующего набора параметров: средний уровень воздействия принимался равным 0,8, а параметры β , γ и σ – 0,4, 0,387 и 0,5, соответственно.

В ходе этих расчетов величину коэффициента вариации увеличивали от 0,1 до тех пор, пока все результаты расчетов оставались в границах области устойчивости системы, вычисленной, исходя из среднего уровня воздействия и параметров, значения которых перечислены выше. Результаты этой серии расчетов представлены на рисунках 4 и 5.

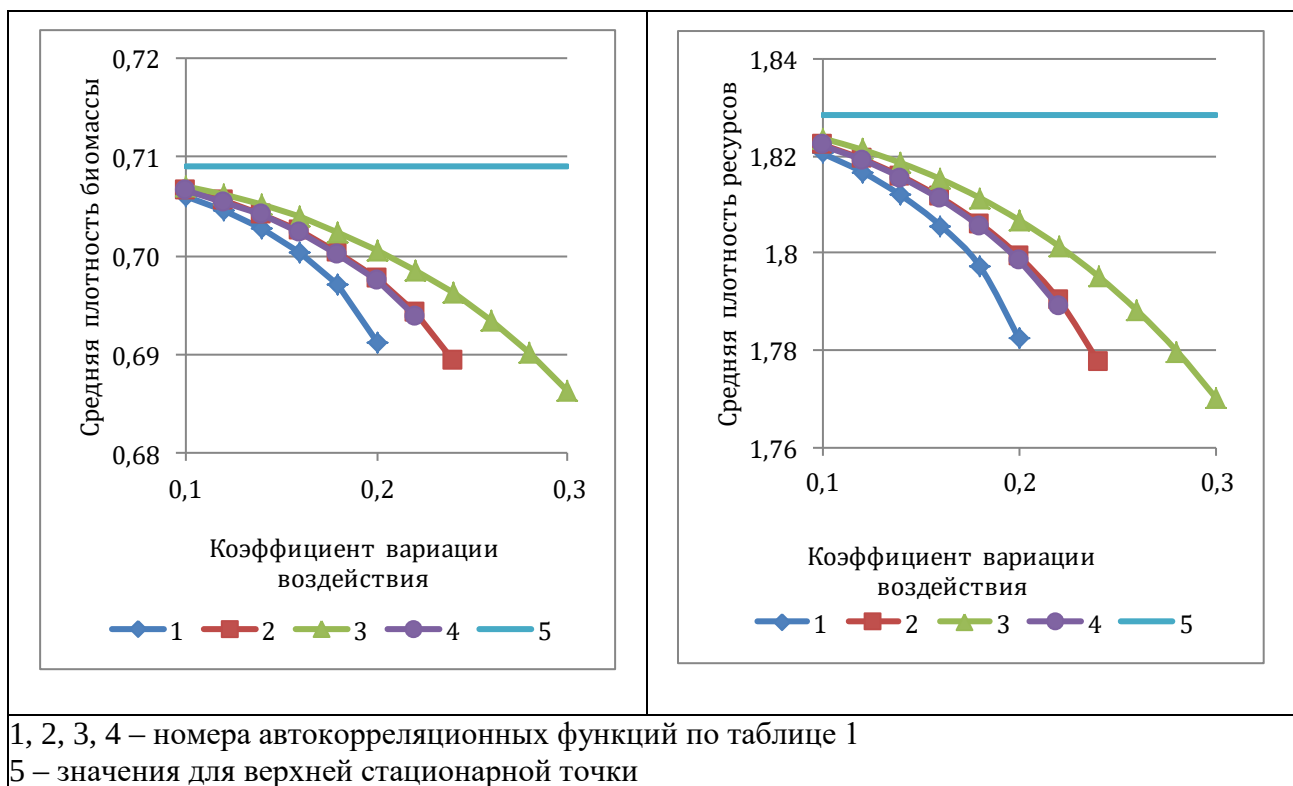


Рис. 4. Зависимость средних значений плотности биомассы и ресурсов от коэффициента вариации воздействия.

Как видно из рисунка 4, зависимость средних значений плотности биомассы и ресурсов от коэффициента вариации воздействия оказалась слабой.

Как для плотности биомассы, так и для плотности ресурсов отличия от значений, вычисленных для верхней стационарной точки, не превышали 4%.

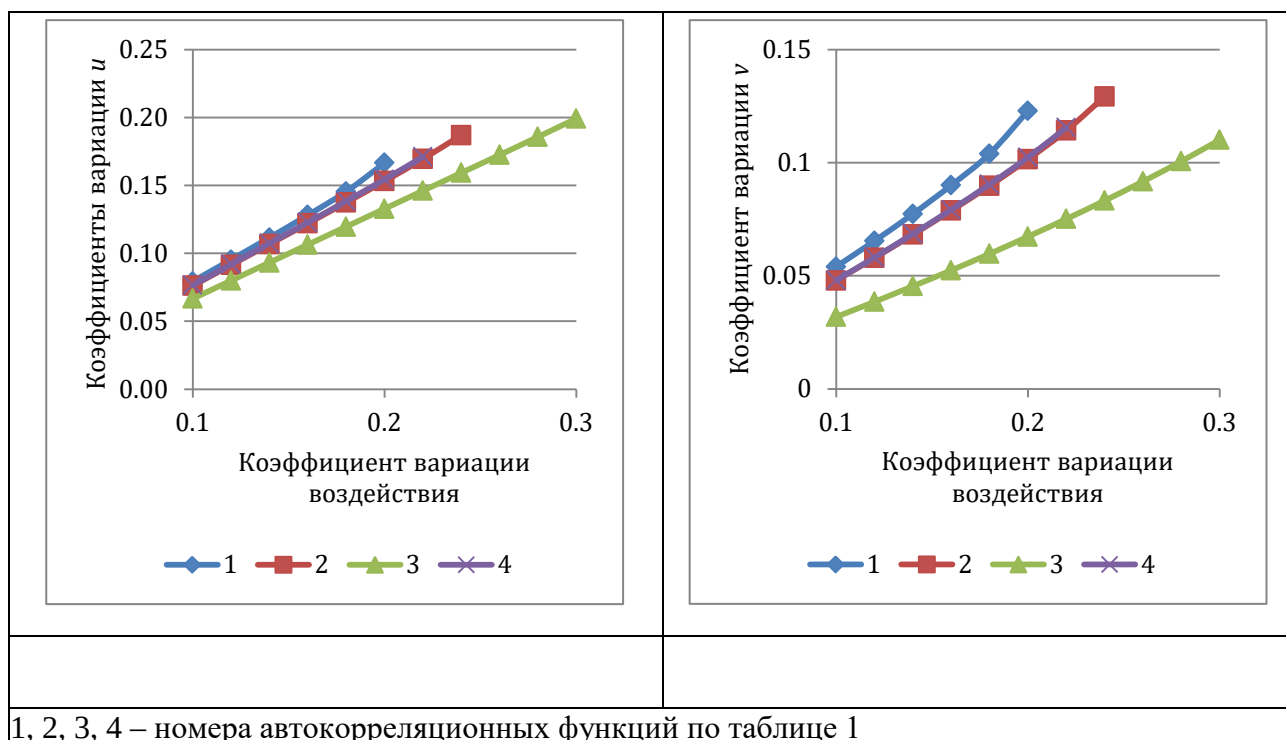


Рис. 5. Зависимость коэффициентов вариации плотности биомассы (u) и ресурсов (v) от коэффициента вариации воздействия.

Как видно из рисунка 5, для коэффициентов вариации во всех случаях наблюдался почти линейный рост. Из полученных результатов следует, что система уравнений (2) мало чувствительна к виду автокорреляционной функции, задающей случайный процесс изменения интенсивности негативного воздействия. В области умеренных колебаний интенсивности негативных воздействий эти колебания мало сказываются на величинах средней плотности биомассы и ресурсов и приводят к линейному росту коэффициентов вариации этих характеристик.

Поэтому все последующие расчеты проводились с использованием экспоненциальной автокорреляционной функции (функция 1 по таблице 1).

На рисунке 6 представлены результаты расчетов, выполненные при варьировании максимального интервала корреляции.

Как видно из рисунка 6, увеличение максимального интервала корреляции приводит к тем же эффектам, что и увеличение коэффициента вариации воздействия, то есть мало влияет на средние значения плотности биомассы и ресурсов и приводит к заметному росту коэффициентов вариации этих характеристик.

Из этого следует, что реакция системы (2) на изменение внешних воздействий увеличивается по мере роста амплитуды отклонения воздействия от среднего уровня и продолжительности таких отклонений, что в качественном плане совпадает с реакциями реальных систем.

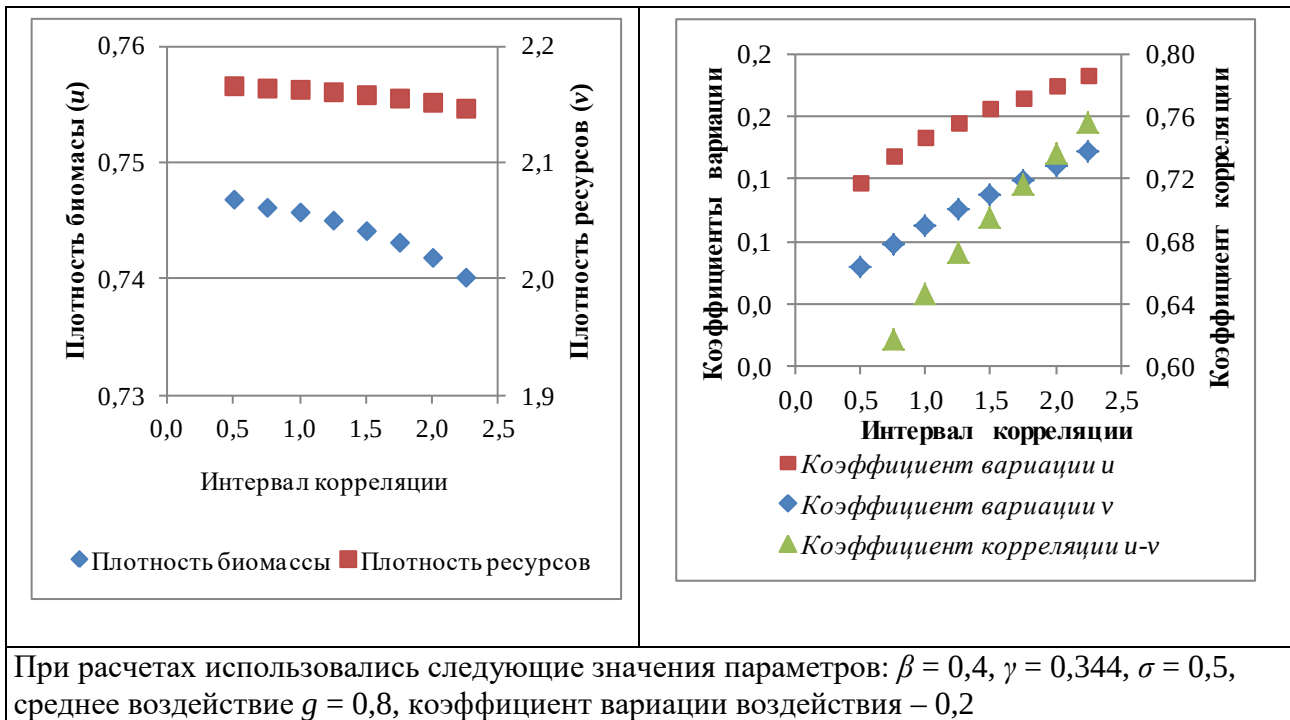


Рис. 6. Влияние изменения максимального интервала корреляции на статистические характеристики решений системы (2).

На рисунке 7 показано влияние изменения среднего значения параметра g на средние значения плотности и коэффициенты вариации биомассы (u) и ресурсов (v), а также на коэффициент корреляции между значениями u и v .

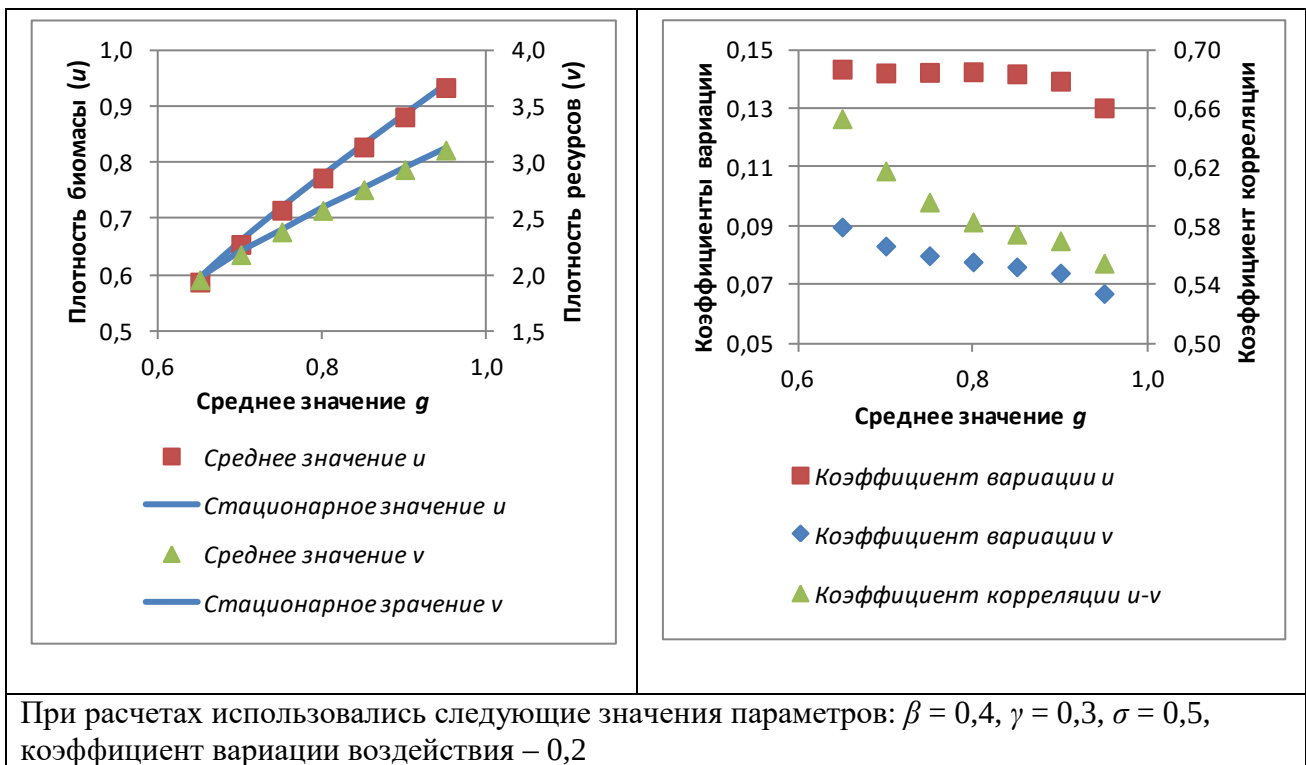


Рис. 7. Влияние изменения средней величины фактора внешнего воздействия (g) на статистические характеристики решений системы (2).

Как видно из рисунка 7, средние значения плотности биомассы и ресурсов практически совпадают со значениями, соответствующими стационарному состоянию для средней величины воздействия. При этом коэффициенты вариации несколько снижаются по мере роста величины параметра g . Такая же тенденция наблюдается и для коэффициента корреляции плотность биомассы – плотность ресурсов.

На рисунке 8 показано влияние изменения параметра γ на средние значения плотности и коэффициенты вариации биомассы (u) и ресурсов (v), а также на коэффициент корреляции между значениями u и v .

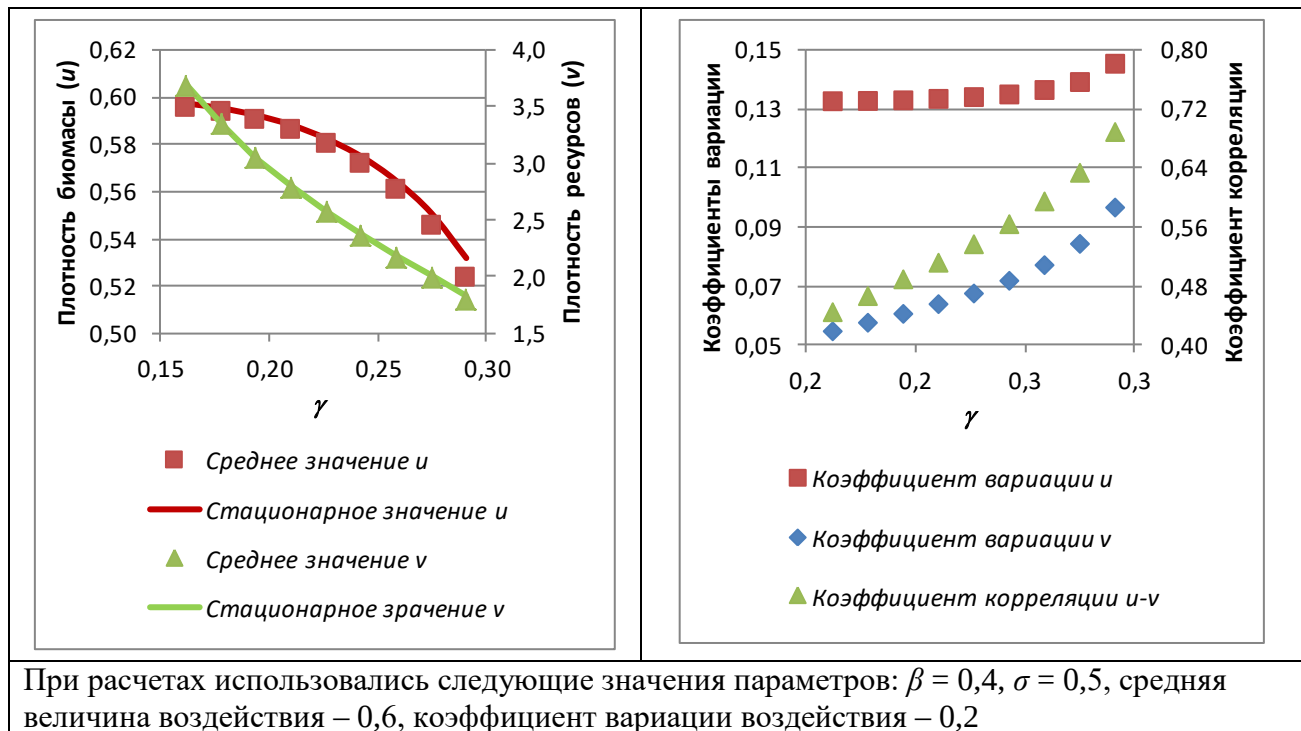


Рис. 8. Влияние изменения параметра γ на статистические характеристики решений системы (2).

Из рисунка 8 видно, что рост величины параметра γ приводит к снижению средних значений и росту коэффициентов вариации плотностей биомассы и ресурсов. При этом, как и в предыдущих случаях, различия между средними плотностями и значениями, характеризующими стационарные состояния плотностей биомассы и ресурсов, оказываются незначительными.

Напомним, что снижение параметра g и рост параметра γ соответствуют ухудшению условий существования экологической системы: в первом случае за счет увеличения средней величины негативного воздействия, во втором – за счет уменьшения способности системы удерживать ресурсы.

Из рисунков 7 и 8 видно, что предложенная модель предсказывает схожие реакции системы на ухудшение условий существования: сокращение продуктивности и увеличение вариации параметров, описывающих текущее состояние системы.

Проведенные расчеты показывают, что предложенная модель предсказывает существование корреляционной связи между параметрами,

характеризующими биомассу и ресурсы экологической системы. Это открывает возможности для количественной оценки устойчивости существования экологических систем на основании анализа временных рядов наблюдений параметров, характеризующих биомассу и ресурсы этих систем.

При этом массив результатов одновременно измеренных плотностей биомассы и ресурсов экологической системы формально можно рассматривать как двумерное распределение, характеризуемое своим центром и дисперсией в направлении изменения плотности биомассы и ресурсов. Центр этого распределения является оценкой плотностей биомассы и ресурсов, соответствующих верхнему стационарному состоянию. При известных значениях N_{max} , $R_{0,5}$ и σ в выражении (1) оценки плотностей биомассы и ресурсов в верхней стационарной точке позволяют, используя систему уравнений (5), оценить параметры g и γ , а по этим параметрам вычислить положение границы, отделяющей область устойчивого существования системы от области деградации.

После этого количественный критерий устойчивости существования экологической системы может быть определен как вероятность того, что вектор состояния системы выйдет за границу области устойчивости. Для получения такой оценки необходимо знать вид двумерного распределения вероятности, характеризующий имеющуюся выборку.

Возможен и иной подход к формулированию количественного критерия устойчивости. В этом случае необходимо определить направление большей оси эллипсоида рассеяния [7] и в этом направлении сравнить стандартное отклонение с расстояния от центра распределения до границы устойчивости.

С другой стороны, тот факт, что средние значения плотностей биомассы и ресурсов близки к значениям, соответствующим верхнему стационарному состоянию создает возможности для оценки параметров N_{max} , $R_{0,5}$ и σ по данным режимных наблюдений, выполненных на различных участках местности, но принадлежащих к одному и тому же биотопу. В этом случае данные по плотностям биомассы и ресурсов должны быть усреднены по времени наблюдений и сгруппированы по интервалам плотности биомассы и ресурсов.

ВЫВОДЫ

Предложена динамическая модель, описывающая взаимодействие биомассы и ресурсов в экологической системе в условиях случайных изменений негативных воздействий.

Показано, что увеличение вариации внешнего воздействия повышает риск деградации экологической системы.

Предложены способы количественной оценки устойчивости экологических систем на основании анализа данных режимных наблюдений, характеризующих плотность биомассы и ресурсов конкретной экосистемы.

Список литературы:

1. Федеральный закон от 10.01.2002 № 7-ФЗ (в ред. Федерального закона от 29.07.2018) «Об охране окружающей среды».

2. *Зильберман М.В., Черепанов М.В.* // Проблемы региональной экологии. 2017. № 5. С. 59.
3. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.
4. *Прохоров С.А.* Динамическое описание и моделирование случайных процессов. Уральск: Самар. гос. аэрокосм. ун-т, 2001. С. 208.
5. *Гамзиков Г.П.* Азот в земледелии Западной Сибири. М.: Наука, 1981.
6. *Айвазян С. А. и др.* Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных. Справочное изд. М.: Финансы и статистика, 1983. С. 178.
7. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. 4-е изд., стереотип. М.: Наука, Физматгиз, 1969.

References:

1. On Protection of the Environment. Federal Law of the Russian Federation of January 10, 2002, No. 7-FL (Edition of 29.07.2018) [in Russian].
2. *Zilberman M.V., Cherepanov M.V.* // Problemy regional'noi ekologii [Problems of regional ecology] 2017. No. 5. P. 59 [in Russian].
3. *Babenko K.I.* Fundamentals of numerical analysis. M.: Nauka, 1986 [in Russian].
4. *Prokhorov S.A.* Dynamic description and simulation of random processes. Uralsk: Samarskii gos. aerokosm. univ., 2001. P. 208 [in Russian].
5. *Gamzikov G.P.* Nitrogen in agriculture of Western Siberia. M.: Nauka, 1981 [in Russian].
6. *Ayvazyan S.A. et al.* Applied statistics: fundamentals of modeling and primary data processing. Reference edition. M.: Finansy i statistika, 1983. P. 178 [in Russian].
7. *Ventsel E.S.* Probability theory. 4th edition. M.: Nauka, 1969 [in Russian].